*We look at a world through narrow slot of our mind*

# Самосогласованная модель денежного потока.

**С.А. Пузенко**

## 1. То, что известно всем.

Техника дисконтирования денежных потоков является одним из основополагающих методов в оценке и принятии инвестиционных решений. Эта техника базируется на формуле текущей стоимости будущих прогнозируемых доходов, которая, в свою очередь, основана на модели рекапитализации доходов, получаемых от депозита.[1]

Формула текущей стоимости будущих денежных поступлений обычно основывается на трех предположениях:

1) В конце срока депозита выплачивается доход по депозиту (обычно измеряется в неизменных % от основной суммы);
2) Основная сумма гарантированно возвращается в конце срока депозита;
3) Основная сумма и доход от депозита опять вносится на депозит на следующий срок (доход рекапитализируется).

При этих предположениях текущая сумма денег и будущая сумма денег связаны простым соотношением:

$$S_{тек} = \frac{\mathrm{S}_{\text{будущ}}}{(1+\mathrm{g})^{\mathrm{n}}}\text{, где} \qquad (1)$$

**g**- ставка по депозиту, а **n**- количество «периодов» депозита.

Эту формулу назвали стоимостью денег во времени и распространили на все случаи жизни. Например, на определение стоимости актива доходным подходом в рамках т.н. модели DCF (discounted cash flow). В рамках этой модели стоимость актива определяется текущей стоимостью прогнозируемых будущих доходов, генерируемых правом собственности на актив. В общем случае, в предположении о переменной ставке дисконта, формула для определения стоимости имеет вид:

$$S = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+g_k)} + R\text{, где} \qquad (2)$$

$n$ – номер периода, $c_n$ - доход, получаемый собственником[2], $g_k$ - т.н. ставка дисконта, которая характеризует взгляды участников рынка на «желаемую» доходность данного актива в $n$– ый период, $N$ - количество периодов предполагаемой эксплуатации актива (или периодов прогнозирования), $R$[3] – текущая стоимость актива после окончания срока его полезной эксплуатации (или после окончания срока прогнозирования).

---

[1] Нет смысла ссылаться на литературу по причине общеизвестности и банальности излагаемого, а также по причине огромного количества учебников на эту тему

[2] Здесь и далее имеется в виду чистый операционный доход

[3] Ее еще называют терминальной стоимостью, постпрогнозной стоимостью или стоимостью реверсии, в зависимости от настроения очередного автора учебника и/или очередного переводчика оригинального английского текста.

Вспомним, что если считать доход и ставку дисконта постоянными, то формула (2) представляет собой сумму геометрической прогрессии:

$$S = \frac{c}{g}[1 - \frac{1}{(1+g)^N}] + R \qquad (3)$$

Если еще считать время прогнозирования бесконечным ( $N \to \infty$ ), то формула(3) приобретает вид хорошо известной формулы т.н. прямой капитализации[4]:

$$S = \frac{c}{g} \qquad (4)$$

В этом случае некоторые называют $\boldsymbol{g}$ ставкой капитализации и доказывают, что она чем-то отличается от ставки дисконта.

Применение метода дисконтирования или прямой капитализации к оценке бизнеса или доходной недвижимости содержит в себе определенные противоречия с основными допущениями формулы стоимости денег во времени.

Во-первых, никто не гарантирует, что стоимость к концу прогнозного периода не изменится (т.е., мы можем в отличие от депозита получить не «номинал», а некоторую другую сумму денег)[5].

Во-вторых, доход, генерируемый бизнесом или недвижимостью, вряд ли капитализируется целиком. В рамках модели дисконтирования денежных потоков доходом называется то, что остается в распоряжении собственника после всех затрат, понесенных в связи с его получением. Понятно, что собственник практически никогда не капитализирует весь свой доход. Поэтому стоимость в рамках этой модели представляется, на первый взгляд, всегда завышенной.

Наконец, в третьих, ставка дисконта не является наблюдаемой величиной. На сегодня общепринятой является точка зрения о том, что доходность – это характеристика рынка актива такая же, как и его цена. В духе принципов формирования рыночной стоимости принято считать, что ставка дисконта – интегральная характеристика рыночной среды, которая вбирает в себя массу факторов, характеризующих доходность различных инвестиционных инструментов и риски инвестиций.

Цена, равно как и доход, генерируемый активом, является наблюдаемыми на рынке величинами. Доходность актива на рынке непосредственно не наблюдается. Тогда возникает вопрос как ее определить. Если это независимый внешний для актива параметр, то тогда возникает вопрос, доходность какого наблюдаемого инструмента наиболее близка к доходности актива? Если это «внутренний» параметр модели (доходность определяется как отношение дохода к цене), то зачем вообще его определять.

На практике принято считать, что доходность все же внешний параметр, который характеризует текущее состояние рыночной среды, а для определения доходности по рыночным данным производят некоторые манипуляции[6].

Для бизнеса самая распространенная манипуляция – это CAPM (capital asset pricing model). В рамках этой модели доходность определяется, в основном, доходностью

---

[4] Метод DCF часто называют методом непрямой капитализации.

[5] Подспудное осознание этого провоцирует другую дискуссию о том, что же такое ставка дисконта – норма дохода как в депозитной модели или норма возврата, учитывающая изменения получаемой в конце периода суммы.

[6] Беда в том, что однозначного алгоритма этих манипуляций не существует, поэтому слово «манипуляция» представляется наиболее удачным для отражения сути подобных расчетов.

фондового рынка. Но при этом возникает спорный вопрос горизонта наблюдений. Например, за какой срок считать доходность индекса S&P– 80 лет, 20 лет, 5 лет. Кроме этого поправки, учитывающие различного рода риски также весьма спорны и неоднозначны.

Для рынка недвижимости – это т.н. модель экстракции из рыночных данных. В рамках этой «экстракции» ставка определяется как отношение рыночных данных об арендной платы к рыночным данным о ценах на недвижимость, обработанное средствами статистики[7]. Но если мы знаем и то и другое, то зачем нам капитализация? Поэтому расчет ставки капитализации (дисконта) для недвижимости методом экстракции из рыночных данных интуитивно вызывает дискомфорт, и лишний раз говорит о взаимной зависимости величин в формуле (4).

Если все же считать, что доходность зависит от стоимости актива и величины дохода, который он генерирует, то тогда стоимость, доход и доходность не являются взаимно независимыми величинами.

В общем случае доход от актива за определенный период времени складывается как за счёт периодических платежей (дивидендов, % по облигациям или арендной платы), генерируемых активом, так и за счёт разности начальной и конечной стоимостей.

Для характеристики такой «общей» доходности придумали показатель - норма возврата (rate of return), которая определяется (примерно) отношением дохода к первоначальным капвложениям:

$$g = \frac{1}{N}\left[\frac{\Delta S + \sum_{n=0}^{N} c_n}{S_0}\right], \text{ где} \qquad (5)$$

$\Delta S = S - S_0$

В зависимости от вида актива, к которому применяется модель, могут быть определенные упрощения. Например, на сырьевых и товарных рынках доходность достигается за счет колебаний цен на соответствующий актив. При этом сам по себе актив не генерирует никаких периодических доходов, не связанных с изменением цены на него. На фондовом рынке доходность достигается, как за счет колебаний котировок ценных бумаг, так и за счет периодических доходов в виде дивидендов или выплат по облигациям. Для недвижимости доходность, в основном, определяется именно периодическими выплатами арендной платы (дохода), поскольку колебания цен на недвижимость очень медленны.

Т.е., в зависимости от вида актива, в формуле (2) может превалировать одно из двух слагаемых, либо первое – предельный случай товарного рынка, либо второе – гипотетический случай недвижимости, которая не меняется в цене со временем.

Другим, часто используемым показателем доходности, является норма дохода (yield rate), которая просто равна отношению дохода к стоимости:

$$g = \frac{c}{S} \qquad (6)$$

Такой подход для определения ставки капитализации часто используется для недвижимости в рамках метода экстракции из рыночных данных.

[7] Статистические усреднения 3-5 наблюдений, практикуемые в оценке, всегда вызывали у меня умиление

## 2. То, что не встречалось в учебниках
## или как мы страдаем от жадности сложного процента

В данной работе построена модель капитализации в предположении о том, что ставка дисконта является величиной зависимой от цены актива и дохода, который он генерирует.

В этом случае параметр доходности можно из рассмотрения совсем исключить и создать самосогласованную модель дисконтированных потоков, которая содержит только наблюдаемые и взаимно не зависимые величины – цену и доход.

Для этих целей удобно перейти от дискретного суммирования к интегрально-дифференциальному представлению стоимости денег во времени.

Непрерывный аналог формулы (2) хорошо известен:

$$S = \int_0^T c(t)e^{-gt}dt + R \qquad (7)^{8}$$

Положив ***c*** и ***g*** – *Const*, имеем непрерывный аналог формулы (3):

$$S = \frac{c}{g}\left[1 - e^{-gT}\right] + R \qquad (8)$$

Если продифференцировать обе части (7), имеем:

$$\frac{dS}{dt} = c(t)e^{-gt} + \frac{dR}{dt} + \qquad (9)$$

Предположим, что нас интересует доходность инвестиции, которая генерируется только периодическими доходами. Тогда ставка дисконта как непрерывный аналог формулы (5) равна норме дохода:

$$g = \frac{1}{T}\frac{\int_0^T c(t)dt}{S_0} \qquad (10)$$

Где $S_0$ - затраты на приобретение или создание объекта. При постоянном доходе имеем, естественно:

$$g = \frac{c}{S_0} \qquad (11)$$

Подставляя (10) в (7), имеем:

$$S = S_0(1 - e^{-\frac{c}{S_0}T}) + R \qquad (10)$$

На больших временах $S = S_0$. Таким способом мы убедились, что непрерывный аналог формул дисконтирования (3) работает и дает понятные всем известные ответы, а $S_0$ – искомая рыночная стоимость.

А еще мы убедились в том, что, если инвесторы ориентируются на эту модель, то в отсутствие влияния внешних факторов рост цены актива не ожидается.

---

[8] Из (7) понятен горизонт изучения доходности, например, для модели CAPM. Это времена порядка 1/g. Т.е., если ожидаемая ставка дисконта порядка 10-13% годовых, то доходность индекса S&P надо оценивать за 6-10 лет.

Рассмотрим более общий случай. Предположим, что инвесторы ожидают, что доходность инвестиции будет генерироваться не только периодическими доходами, но и изменением цены актива в будущем. Тогда доходность характеризуется нормой возврата, которая с учетом непрерывного аналога формулы (5) имеет следующий вид:

$$g = \frac{1}{T}\left[\frac{S - S_0 + \int_0^T c(t)dt}{S_0}\right] \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) получаем уравнение относительно *S*.

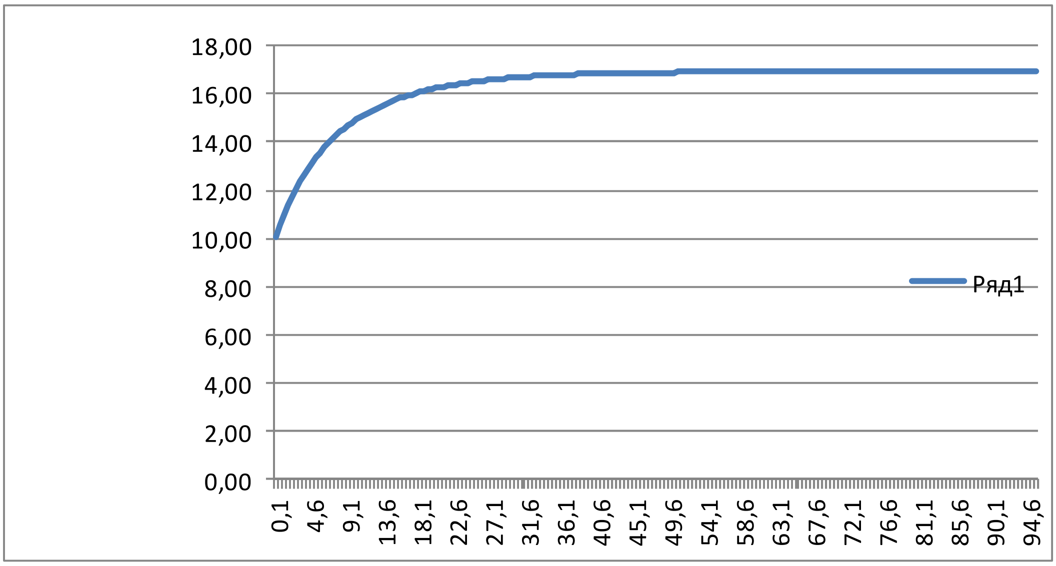
$$S' = c(t)\exp\left[-\frac{S - S_0 + \int_0^T c(t)dt}{S_0}\right] \tag{12}$$

В общем виде решение такого уравнения получить в явном виде не представляется возможным

Рассмотрим простейший случай постоянного дохода (*c* – *Const*). Решение уравнения (12) имеет вид:

$$S(t) = S_0\left[1 + \ln(2 - e^{-\frac{c}{S_0}t})\right] \tag{13}$$

Т.е., если инвесторы ориентируются на модель, в которой ожидается рост стоимости актива, то он и происходит. Причём, в отсутствие внешних факторов, стоимость актива на больших временах возрастает примерно в (1+ln2) раза[9] вне зависимости от начальной стоимости инвестиции и генерируемого ею дохода.




Норма возврата в таком представлении выражается как:

[9] примерно в 1,7 раза

$$g = \frac{c}{S_0} + \frac{1}{T}\ln(2 - e^{-\frac{c}{S_0}T}) \qquad (14)$$

При малых временах $g \approx \frac{2c}{S_0}$, а при больших - $g \approx \frac{c}{S_0}$. Т.е., доходность сначала в два раза превышает, привычную всем норму капитализации, но со временем уменьшается до ее уровня.

Более сложным представляется случай, когда норма дохода определяется стоимостью в каждый момент времени (что и требуется при оценке[10]):

$$\mathrm{g} = \frac{c}{S} \qquad (15)$$

Подставляя (12) в (8) имеем нелинейное дифференциальное уравнение:

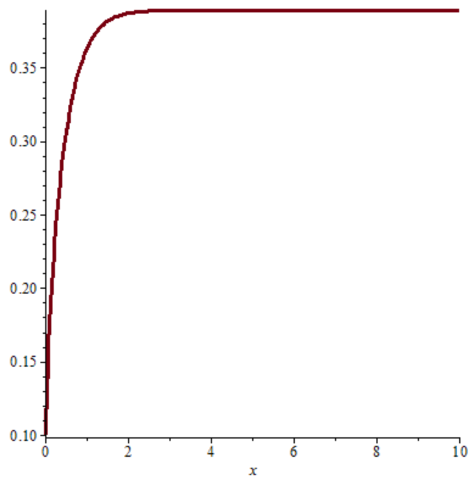
$$\frac{dS}{dT} = c(T)\exp(-\frac{c}{S}T) \qquad (16)$$

С начальным условием $S(0) = S_0$. В общем виде получить решение не представляется возможным. Начнем с простого случая постоянного дохода. Это позволяет несколько упростить задачу. Заменой переменной $\tau = cT$ уравнение (16) преобразуется к виду:

$$\frac{dS}{d\tau} = \exp(-\frac{\tau}{S}) \qquad (17)$$

Такое представление уже говорит о том, что эволюция стоимости не зависит от дохода, генерируемого активом, а только «сжимает» или «растягивает» шкалу времени.

Это уравнение можно решить численно. На рисунке представлено решение при постоянном доходе:




Заметим, что в этом случае стоимость растет существенно больше по сравнению с предыдущим случаем (примерно в 3,9 раза). Соответственно, гораздо быстрее убывает доходность.

---

[10] Учебник РИКС

Заметим, что все приближенные результаты, полученные для больших времен (в пределе $T \to \infty$ ) эквивалентны понятию прямой капитализации в обычном понимании.

**Т.о., можно заключить, что использование для принятия инвестиционных решений теории стоимости денег во времени при определённых взглядах на доходность провоцирует ожидания достаточно резкого роста стоимости актива, который на больших временах не зависит от генерируемого им дохода.**

Разумеется, в жизни так не бывает. Заметим, что мы ограничили рассмотрение «внутренней» динамикой данной модели, предполагая отсутствие внешних факторов, например, таких как спрос и предложение[11]. Игнорировать их невозможно и, скорее всего они являются сдерживающими для столь резкого роста. Но осознание того, что все мы являемся заложниками внутренних особенностей модели сложного процента – неприятно.

И последнее. Данный аппарат никоим образом не позволяет определить стоимость[12], а применён лишь для исследования внутренней динамики модели стоимости денег во времени.

---

[11] Это предмет дальнейших исследований.

[12] Потому что в решении фигурирует в качестве неопределенного параметра начальное условие.