

Узагальнена Стохастична Модель Оцінки Верхньої або «Граничної» та Нижньої або «Пруденційної» Межі Довгострокової Вартості

Якубовський Валерій Володимирович

д.т.н., професор, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут міжнародних відносин, кафедра міжнародного бізнесу

Бичков Олексій Сергійович

д.т.н., професор, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, кафедра інформаційних технологій та систем.

Жук Катерина Дмитрівна,

Бакалавр, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, економічний факультет.

Анотація

Мета. Основною метою та змістом дослідження є аналіз існуючих підходів до впливу коливань вартості нерухомості в часі та розробка аналітичного підходу до врахування його ролі.

В якості теоретичної основи для визначення верхньої або «граничної» та нижньої або «пруденційної» оцінки вартості була закладена "Раціональна теорія варрантного ціноутворення" П. Самуельсона. Отримано аналітичні рішення для оцінки параметрів поправок, необхідних для наближення з певним рівнем достовірності як до верхньої, так і до нижньої межі вартості об'єкта оцінки, що стохастично змінюється в часі. Продемонстровано практичне застосування розробленої узагальненої методики на прикладі наявної бази даних житлової нерухомості.

Висновки. Розроблено та протестовано узагальнений аналітичний підхід до оцінки нижньої та верхньої меж вартості нерухомості. Модель поєднує в собі початкову ринкову вартість, загальну тенденцію її зміни в часі, рівень волатильності та необхідну надійність оцінки. Досліджено вплив цих основних параметрів на нижню та верхню межі оцінки.

Оригінальність/цінність. У дослідженні представлено та описано нову стохастичну аналітичну методологію для оцінки нижньої та верхньої межі вартості об'єкта оцінки, що еволюціонує в часі.

Ключові слова. Стохастична модель, волатильність вартості, обачлива вартість, гранична вартість, довгострокова вартість, марковські процеси, коригувальний параметр, тестування моделі, оцінка вартості.

1. Вступ та огляд

Оцінка майна широко використовується у фінансовій системі, відіграючи ключову роль у таких процесах, як лістинг компаній, злиття та поглинання, фінансування та інвестиції, фінансова звітність, аудит, кредитування під заставу, оподаткування, страхування, судові процеси, неплатоспроможність та багато інших. Це підтверджує важливість надійних і достовірних підходів, методів і практик оцінки для стабільної роботи світової фінансової системи, як підкреслює Міжнародна рада зі стандартів оцінки (IVSC, 2023/1).

Згідно з вимогами всіх міжнародно визнаних стандартів оцінки, всі ключові бази вартості, які визначають фундаментальні передумови, на яких базується вартість активів, такі як ринкова вартість, справедлива вартість, інвестиційна вартість тощо, повинні бути

визначені на конкретну дату оцінки. Як приклад, визначення найбільш широко використовуваної ринкової вартості зазначає, що "ринкова вартість - це розрахункова сума, за якою актив або зобов'язання можуть бути обміняні на дату оцінки між двома незалежними сторонами - продавцем і покупцем..." Це означає, що для майна, яке розглядається, ринкова вартість має бути визначена відповідно до цього фіксованого часу (IVS, 2022).

Але з розвитком ринку під впливом широкого спектру діючих екзогенних та ендогенних факторів ця вартість буде змінюватися з часом, і в будь-який інший момент часу вона може бути або вищою, або нижчою від її рівня для цього фіксованого моменту часу, лише випадково співпадаючи з ним. Такі коливання вартості активів є неминучими в ринковій економіці зі стохастичними процесами її розвитку, що створює проблему оцінки належного рівня вартості для застосувань, де ефект часу є суттєвим. Власне, вимоги щодо оцінки вартості майна на фіксований момент часу можна вважати підтвердженням того, що час має значення в процесах оцінки вартості.

Ці явища, пов'язані з ефектом часу загальноновизнані як важливі. Значний поштовх у цьому сенсі дала остання глобальна фінансова криза 2007-2009 років. Проведений детальний розгляд корінних причин цієї світової кризи висвітлює оцінку як одну з таких причин. Загальну важливість надійної оцінки переконливо підкреслюють, зокрема, узагальнені дані зі США, Європи та Японії, які показують, що половина падіння вартості банків під час глобальної фінансової кризи та нещодавнього ефекту COVID-19 була спричинена падінням цін на інвестиційні фонди нерухомості (Kohlscheen and Takats, 2020).

У відповідь на недоліки фінансового регулювання, виявлені глобальною кризою, у третій частині Базельської угоди (Базель III), зокрема, зазначено, що "...оцінка повинна здійснюватися ... з використанням розумно консервативних критеріїв..." (Базель III, 2017). В рамках ЄС керівні принципи Базель III були імплементовані через Регламент ЄС 575/2013 про пруденційні вимоги до кредитних установ та інвестиційних компаній (EUR, 2013) та регуляторні технічні стандарти Європейської Банківської Адміністрації 2012&2020 (EBA, 2019, EBA, 2020). Як наслідок, Базельська угода III та Європейська Банківська Адміністрація (ЄБА) підкреслили, що фінансовим установам не можна дозволяти застосовувати виключно концепцію ринкової або справедливої вартості в практиці оцінки активів

Впровадження цих пруденційних вимог визнано важливим заходом для забезпечення ефективності функціонування банківських та інших фінансових установ і покликане забезпечити фінансову стабільність операторів на тих ринках, де існує високий рівень захисту інтересів інвесторів. Як наслідок, Базельська угода III та Європейська Банківська Адміністрація (ЄБА) не допускають застосовування виключно концепції "ринкової вартості" або "справедливої вартості" в оціночній практиці фінансових установ.

Для забезпечення стабільності та стійкості фінансової системи регуляторні вимоги, згадані вище, спрямовані, в першу чергу, на застосування «пруденційної» або «обачливої» оцінки вартості майна з акцентом на нижню межу вартості у доповненні до стандартизованого підходу "ринкової вартості". В той же час окрім нижньої межі або «пруденційної» вартості, оцінка верхньої або «граничної» межі вартості для кількох важливих практичних застосувань також повинна розглядатися як важлива. Будь-який інвестор, наприклад, перед прийняттям остаточного інвестиційного рішення може бути зацікавлений в отриманні максимального обсягу ресурсів, необхідних протягом тривалості проекту. Те ж саме можна сказати і про оподаткування, злиття та поглинання, судові процеси. Таким чином, для вартості майна, що змінюється в часі, цікавою і важливою є не лише нижня, але й верхня межа, яку можна назвати "граничною" вартістю. Через це більш

бажаною є узагальнена методологія, яка передбачає можливість оцінки на одній платформі як верхньої, так і нижньої межі зміни вартості за певний період часу.

При цьому зміна вартості майна з часом відбувається в межах своєї нижньої та верхньої межі стохастично. Це цілком природно, оскільки така еволюція відбувається під впливом широкого спектру ендегенних та екзогенних факторів, що стохастично змінюються в часі на відкритих ринках. Це нашоєхує на думку про доцільність застосування імовірнісного підходу до оцінки меж еволюції вартості.

Поступове визнання не тільки корисності, але й реальної необхідності залучення імовірнісного аналізу до оцінки вартості пройшло довгий шлях в історії становлення професії оцінювача. Ще Фома Аквінський у XIII столітті стверджував, що «справедлива вартість речей не може бути визначена з математичною точністю, а залежить від прийнятого методу оцінки» (Ф. Аквінський, 1273 р.). Це твердження можна розглядати як історичне передбачення поглядів Джузеппе Медічі, який, ймовірно, вперше чітко сформулював поняття "найбільш вірогідної ринкової ціни", що з'явилося в 1953 році або через сім століть після цього на зміну традиційно використовуваному в той час поняттю "найвищої ціни" (Medici, 1953).

Незалежно від того, який оціночний підхід і конкретний метод або навіть комбінація методів були використані, оцінка вартості за визначенням завжди є прогнозом. І як будь-який прогноз, процес оцінки постійно стикається з невизначеністю, яка обумовлена впливом широкого спектру факторів, що розвиваються стохастично. Звідси випливає очевидний висновок, що вартість активів, оцінена на основі ринкових цін, зокрема, в рамках порівняльного та витратного підходів безпосередньо, а в рамках дохідного підходу - опосередковано, через грошові потоки, є випадковою величиною і повинна розглядатися як така.

Цю концепцію імовірнісного характеру оцінки вартості активно підтримували і розвивали Річард У. Реткліфф (Ratcliff, 1964), Джеймс Грааскамп (Graaskamp, 1977) та Вільям Кіннард (Kinnard, 1966). Пізніше ця концепція була розширена Максом Куммеровим (Kummerov, 2002) і Гейлом Пулі (Gale L. Pooley, 2015). Генрі Бабкок (Henry Babcock) у своєму широко визнаному підручнику 1968 року також висловився на користь "найімовірнішої ціни купівлі-продажу" як центральної для поняття ринкової вартості (Babcock, 1968).

На додаток до концепції "найбільш ймовірної ціни" Реткліфф запропонував одночасно виражати вартість в імовірнісних термінах, а саме у вигляді 90 % довірчого інтервалу (Ratcliff, 1964). І, нарешті, поняття ринкової вартості було закріплено в останніх редакціях Міжнародних стандартів оцінки як "...найбільш ймовірна ціна, яку можна обґрунтовано отримати на ринку на дату оцінки..." (IVS, 2022).

Всі ці особливості чітко вказують на своєчасність і доцільність врахування ролі ефекту часу в процесах оцінки вартості майна з визначенням не тільки середнього, медіани або найбільш вірогідних параметрів вартості, але й деяких додаткових метрик, які можуть характеризувати рівень волатильності очікуваної вартості. А це особливо важливо для багатьох практичних застосувань, де можливі зміни вартості протягом життя проекту відіграють суттєву роль з плином часу. Зважаючи на стохастичний характер еволюції вартості в часі, для того, щоб бути надійною та достовірною, така методологія оцінки додаткових метрик повинна ґрунтуватись на концепціях імовірнісного аналізу.

Виходячи з цього, основна увага в роботі зосереджена на розгляді поточного стану врахування часового ефекту при оцінці довгострокової вартості активів та пропозиції нового узагальненого аналітичного підходу до оцінки як нижньої, або "пруденційної" межі вартості, так і її верхньої, або "граничної", межі з апробацією отриманих результатів на наявному масиві даних про еволюцію ринкової вартості майна.

2. Огляд існуючих підходів

У відповідь на згадані вище практичні потреби було розроблено кілька підходів до врахування ролі ефекту часу в оцінці вартості майна. Щодо циклічного характеру зміни вартості в часі було визначено дві основні концепції (Crosby and Hordijk, 2021). Перша з них - "наскрізний підхід", який усереднює або "згладжує" коливання моделі вартості протягом певного періоду часу з метою визначення справедливої економічної або рівноважної вартості. Основне застосування такої моделі охоплює переважно інвестиційний тип фінансового аналізу та прийняття загальних рішень з урахуванням часового ефекту (рис. 1)

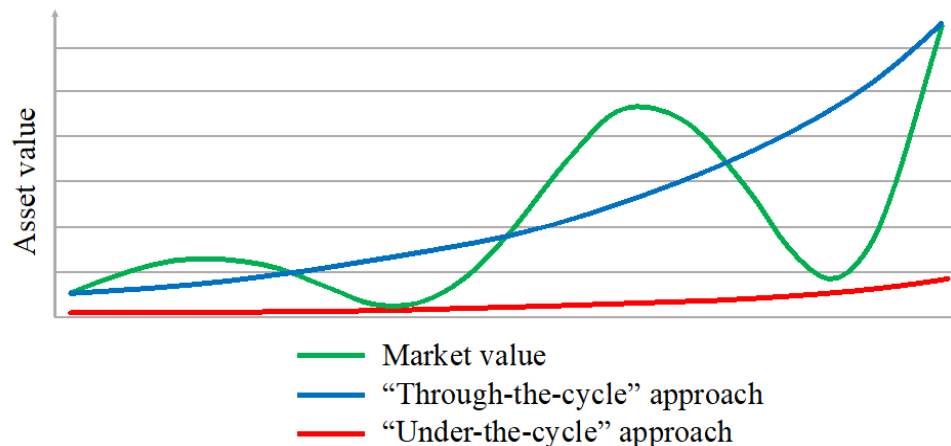


Рис. 1. Загальна схема підходів "наскрізного" та "під циклом".

Другий - це концепція "під циклом", яка має на меті знайти нижню "бордюрну" лінію коливань ринкової вартості протягом певного періоду часу (рис. 1). Цей другий тип концепцій більш точно відображає вимоги Базель III щодо здійснення пруденційної оцінки вартості активів з урахуванням довгострокового ефекту. Ця "пруденційна" довгострокова вартість не повинна перевищувати ринкову вартість у будь-який момент часу, що розглядається, відповідно до цих рекомендацій.

У технічній літературі, присвяченій оцінці майна з урахуванням часового ефекту, авторам не вдалося знайти жодної методики визначення верхньої межі вартості, яка б дозволила отримати метрику її "граничної межі".

Найбільш поширеними підходами "наскрізного циклу" для врахування часового ефекту є підходи, описані Нордлундом (Nordlund, 2008) та Кардозо (Cardozo *et al*, 2017), які отримали назву "референтної моделі вартості" (*reference value model*) та "скоригована ринкова вартість – AMV" (*adjusted market value*), відповідно. Обидві моделі ґрунтуються на попередніх статистичних даних шляхом визначення довгострокових тенденцій з залученням наявних даних за минулі періоди, припускаючи, що майбутнє буде схожим на минуле.

Новіша AMV-модель ґрунтується на порівнянні поточної ринкової вартості активу, відображеної у відповідному індексі вартості капіталу, з довгостроковою лінією тренду. Побудована на основі регресії довгострокова лінія тренду будується динамічно, а не ретроспективно, за допомогою індексу вартості капіталу, скоригованого на інфляцію (Cardozo *et al*, 2017).

Більш складні моделі "наскрізного циклу" включають певний розгляд продовження тенденції на майбутнє з посиланням на поточну вартість, з прогнозом її зміни в найближчі роки. Такий прогноз переважно базується на традиційних моделях дисконтованих грошових потоків (DCF) (Burstion and Burrel, 2015), (Crosby and Hughes, 2011), (PIA, 2017)

Серед підходів "під циклом" найдовшу історію розвитку має підхід "вартості іпотечного кредитування" (Mortgage Lending Value, MLV), розроблений переважно в Німеччині ще на початку цього століття (Grimman, 2017). Розробкою та впровадженням цієї концепції займалася Асоціація німецьких іпотечних банків (German Pfandbrief Banks-VDP) у тісній

співпраці з Федеральною службою фінансового нагляду (Federal Financial Supervisory Office). Будучи найбільш усталеним, цей підхід набув чинності у 2005 році завдяки прийняттю Закону про іпотечне кредитування, який регулює визначення вартості іпотечного кредиту в (Grimman, 2017).

Відтоді цей підхід відіграє центральну роль в оцінці майна для цілей кредитування в Німеччині. Серед європейських країн, які певною мірою наслідують досвід Німеччини в цьому питанні, - Австрія, Чехія, Угорщина, Люксембург, Польща, Словенія та Іспанія (RICS, 2018).

Визначення вартості іпотечного кредитування викладено в Регламенті ЄС про вимоги до капіталу (CRR) № 575/2013 як "вартість нерухомого майна, визначена шляхом пруденційної оцінки майбутньої ринкової вартості майна з урахуванням довгострокових стійких аспектів майна, нормальних і місцевих ринкових умов, поточного використання та альтернативних належних способів використання майна" (EUR, 2013 р.).

За своєю суттю модель MLV будується на концептуальній основі без значної деталізації. Будучи єдиною концепцією довгострокової вартості, яка була розроблена та прийнята для цілей кредитування під заставу, її концептуальна основа призвела до того, що застосування концепції в різних юрисдикціях відрізняється (Crosby and Hordijk, 2021). Різноманітність застосування цієї моделі в різних країнах створює певні складнощі порівняльного характеру та зумовлює потребу в уніфікованому підході.

При визначенні вартості нерухомості, наявні бази даних про поточні транзакції повинні супроводжуватись більш широким аналізом минулих періодів, а також обґрунтованим прогностичним аналізом, який додається для отримання "пруденційної" довгострокової вартості. Таким чином, він ґрунтується на спільному розгляді наявних історичних емпіричних даних, поточної ринкової вартості та майбутніх оцінок з використанням аналізу та прогнозів, які ігнорують короткострокову волатильність цін, щоб досягти реалістичного найнижчого можливого рівня ринкової вартості, який очікується в майбутньому часовому горизонті, що розглядається.

Більш структурований підхід до обґрунтованої оцінки вартості наведено в Нормативно-технічному стандарті Європейської Банківської Адміністрації щодо пруденційної оцінки, який становить основу Рамкової системи пруденційної оцінки ЄС (EBA, 2020). У загальному сенсі CRR вимагає від установ здійснювати пруденційну оцінку фінансових активів, що оцінюються за справедливою вартістю, та вираховувати з отриманих результатів додаткові коригування оцінки (AVA) з капіталу першого рівня (CET1) (EUR, 2013).

СБА РТС (EBA, 2020) дозволяє застосовувати два підходи до пруденційної оцінки. Спрощений підхід, що застосовується для фінансових установ із загальною справедливою вартістю активів та зобов'язань нижче 15 млрд євро, передбачає загальну суму AVA на рівні 0,1% від загальної справедливої вартості. Основний підхід, обов'язковий для установ, вартість активів яких перевищує поріг у 15 млрд євро, передбачає розрахунок 9 AVA, що посиляються на найвпливовіші джерела невизначеності оцінки, щоб досягти пруденційної вартості з 90% рівнем довіри.

Де це можливо, розрахунок відповідних AVA має ґрунтуватися на ринкових даних та визначеному рівні достовірності. У разі відсутності ринкових даних використовується експертний підхід з тим самим 90% рівнем визначеності. Для врахування кореляції між різними рівнями невизначеності, що розглядаються, передбачено коефіцієнт агрегування при виведенні загального рівня AVA. Спочатку встановлений на рівні 50%, цей коефіцієнт був згодом підвищений до 66% (EBA, 2020).

Слід також зазначити, що всі підходи типу "під-циклом" в загальному розумінні також можуть бути застосовані в якості схеми для оцінки верхньої межі вартості або "граничного" значення для періоду часу, що розглядається. Це може бути зроблено за так званою дзеркальною схемою по відношенню до "пруденційних" принципів оцінки вартості з

деякими додатковими коригуваннями. Наскільки відомо авторам, у спеціальній технічній літературі не існує вказівок та методології для визначення на тих самих принципах верхньої межі вартості майна, що стохастично розвивається, або "граничної" вартості.

За наявності певних індивідуальних особливостей, однією з основних спільних рис усіх методологій оцінки довгострокової "пруденційної" вартості є схематизація моделі зміни вартості в часі, як показано на рис. 1, коли ринкова або справедлива вартість активів повинна бути скоригована для досягнення довгострокової "обачливої" вартості шляхом вирахування певних поправок. Такі коригування не є аналітично та статистично обґрунтованими, оскільки в основному базуються на думці експертів, а не на аналізі коливань вартості нерухомості в часі. Це також вказує на необхідність розробки більш надійних та достовірних аналітично обґрунтованих моделей для оцінки як верхніх, так і нижніх екстремумів ринкової вартості, що стохастично змінюються в часі. Необхідність розробок у цій сфері була підкреслена міжнародною групою експертів, які представляють найбільш визнані міжнародні професійні організації з оцінки (Crosby and Hordijk, 2021).

Враховуючи природу і характер еволюції вартості в часі, це викликає необхідність звернення до теорії стохастичних процесів для вирішення цієї практично необхідної задачі розробки узагальненого стохастично обґрунтованого підходу до оцінки як нижньої, так і верхньої границі вартості активів. Ця теза становить основну мету і водночас основний зміст представленої публікації.

3. Основи методології

У досить широкому спектрі сімейства стохастичних процесів найбільш придатними для основних цілей, зазначених вище, є процеси типу Маркова. Основною причиною цього є той факт, що математична база марковських процесів є найбільш повно розробленою порівняно з іншими типами стохастичних процесів (Doob, 1990). Ця перевага створює певні перспективи застосування теорії марковських процесів для ефективного розв'язання досить широкого кола практичних задач у різних сферах.

Історія застосування марковських процесів в економіці починається ще на початку минулого століття, коли французький математик Луї Башельє використав вінерівський процес для моделювання змін цін на Паризькій біржі (Bachelier, 1900). Ця публікація сьогодні вважається піонерською в галузі фінансової математики.

Серед інших важливих історичних прикладів застосування марковських процесів в економетриці - аналіз розподілу доходів (Fama, 1965), мінливості розмірів фірм, волатильності цін на активи та ринкових крахів (Hamilton, 1989), еволюції ВВП тощо (Calvet, *et al.*, 2001). Останніми прикладами є мультифрактальна модель перемикавання, розроблена Лораном Кальве та Адлаєм Фішером (2004), яка використовує довільно великий ланцюг Маркова для визначення рівня волатильності дохідності активів, та аналіз волатильності акцій у зв'язку з емісійною премією, проведений Майклом Бреннаном та Сябом Йіхонгом (2008)

Однією з найважливіших переваг марковських процесів є те, що для них існує загальні теоретичні рішення, які оцінює часові параметри, коли такі стохастичні процеси можуть досягти нижньої, верхньої або будь-якої іншої межі (Тихонов і Миронов, 1977). Ця можливість відкриває основний шлях до розв'язання обговорюваної проблеми - визначення нижньої або "пруденційної" та верхньої або "граничної" величини вартості, що розвивається стохастично.

В той же час аналітичні рішення щодо наближення марковського процесу до границь зазвичай зосереджені на оцінці функції розподілу ймовірності першого наближення до певної границі або перших двох моментів цього параметра, тобто середнього часу та дисперсії (Svechnikov, 2007). Це створює певні труднощі, оскільки ми маємо розв'язати протилежну задачу, оскільки нас цікавлять не ймовірнісні параметри першого наближення

до границі, а саме параметрів границі для марковського процесу, що еволюціонує на часовому горизонті об'єкта аналізу.

Загалом, розв'язання цієї задачі складається з двох послідовних етапів. Перший пов'язаний з належним аналітичним описом стохастичної поведінки вартості активу. Це дає можливість на наступному етапі з'ясувати оцінку верхньої та нижньої граничної величини цього процесу для заданого періоду часу із заданим рівнем ймовірності.

4.Базова аналітична модель.

Серед аналітичних рішень щодо опису стохастичних процесів в економіці, мабуть, найбільш відомим і визнаним є раціональна теорія варрантного ціноутворення, розроблена Полом Самуельсоном (1965). Ввівши поняття невід'ємного "економічного" броунівського руху, він суттєво модернізував та покращив опис таких стохастичних процесів. На підставі цього була розроблена повна теорія варрантного ціноутворення.

Розроблена модель ринку "дифузійного" типу знайшла широке застосування в стохастичній фінансовій математиці протягом останніх десятиліть. Зокрема, з цією моделлю пов'язані відомі результати Блека і Шоулза (1973), Мертона (1973), Бенсуссана (1984), Карацаса і Шрева (1988) у різних важливих галузях постнеокласичної економіки.

Дотримуючись позначень, наведених Ширяєвим *та ін.* (1995), ми можемо описати стохастичну еволюцію вартості активу V_t наступним рівнянням дифузійного типу:

$$V_t = V_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}, t \geq 0. \quad (1)$$

Тут $V_0 > 0$ - вартість активу в момент часу $t = 0$, яка є не випадковою і відомою, $\mu \in \mathbb{R}$ - коефіцієнт зростання, $\sigma > 0$ - волатильність процесу, а W_t - вінерівський процес з неперервними траєкторіями.

Згідно з рівнянням (1), еволюція вартості активу V_t залежить насамперед від трьох ключових параметрів: коефіцієнта зростання μ , коефіцієнта волатильності $\sigma > 0$ та "випадковості" процесу Вейнера, що визначається функцією W_t . Фактично, за своєю природою рівняння (1) дає опис стохастичної еволюції вартості активу в часі, причому його основні параметри мають бути оцінені на основі аналізу даних про еволюцію вартісного процесу.

У даному випадку оцінки нижньої та верхньої меж процесу еволюції вартості застосування моделі (1) полягає в наступному. Переписавши рівняння (1) в термінах лог-значень, отримаємо:

$$V_t = V_0 + at + \sigma W_t, t \geq 0 \quad (2)$$

Де:

$$a = \mu - \frac{\sigma^2}{2}, t \geq 0 \quad (3)$$

За заданим поточним значенням V_0 , ймовірністю p та часовим горизонтом $T > 0$, наша мета - знайти $\Delta_{t,p}$ таке, що

$$- \text{ для нижньої межі } - P\{\min V_t \geq (V_0 - \Delta_{t,p})\} = p, 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

$$- \text{ для верхньої межі } - P\{\max V_t \leq (V_0 + \Delta_{t,p})\} = p, 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

Враховуючи вираз для плаваючого супремуму масштабованого броунівського руху з лінійним дрейфом (Debicki and Mandjes, 2015), для будь-якого $\Delta_{t,p,car}$ у випадку верхньої межі з використанням рівнянь (2), (3) та (5) маємо:

$$\begin{aligned} P\{\max V_t \leq (V_0 + \Delta_{t,p,car})\} &= P\{\max(at + \sigma W_t) \leq \ln(V_0 + \Delta_{t,p,car}) - \ln V_0\} = \\ &= 1 - \exp\left(\frac{2ay}{\sigma^2}\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{y+aT}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right) + \Phi\left(\frac{y-aT}{\sigma\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

де $y = \ln(V_0 + \Delta_{t,p,car}) - \ln V_0$ та Φ означає стандартну нормальну кумулятивну функцію розподілу.

Якщо для заданого $p \in (0,1)$, $y_p \geq 0$ - дійсне число, таке що:

$$-\exp\left(\frac{2ay_p}{\sigma^2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{y_p + aT}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right) + \Phi\left(\frac{y_p - aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) = p \quad (7)$$

то $\Delta_{t,p,car} = V_0(e^{y_p} - 1)$ задовольняє рівнянню $P\{\max V_t \leq (V_0 + \Delta_{t,p,car})\} = p$, оскільки:

$$\ln(V_0 + \Delta_{t,p,car}) - \ln V_0 = \ln((V_0 + V_0(e^{y_p} - 1))) = \ln(V_0 e^{y_p}) - \ln V_0 = y_p.$$

Таким чином, $\Delta_{t,p,car} = V_0(e^{y_p} - 1)$ є необхідним рішенням для

$$P\{\max V_t \leq (V_0 + \Delta_{t,p,car})\} = p \quad (8)$$

Використовуючи подібний підхід, ми можемо прийти до наступної оцінки параметра корекції $\Delta_{t,p,prud}$ для оцінки нижньої межі еволюції значення, яка має наступний вигляд

$$\Delta_{t,p,prud} = V_0(1 - \exp^{x_p}).$$

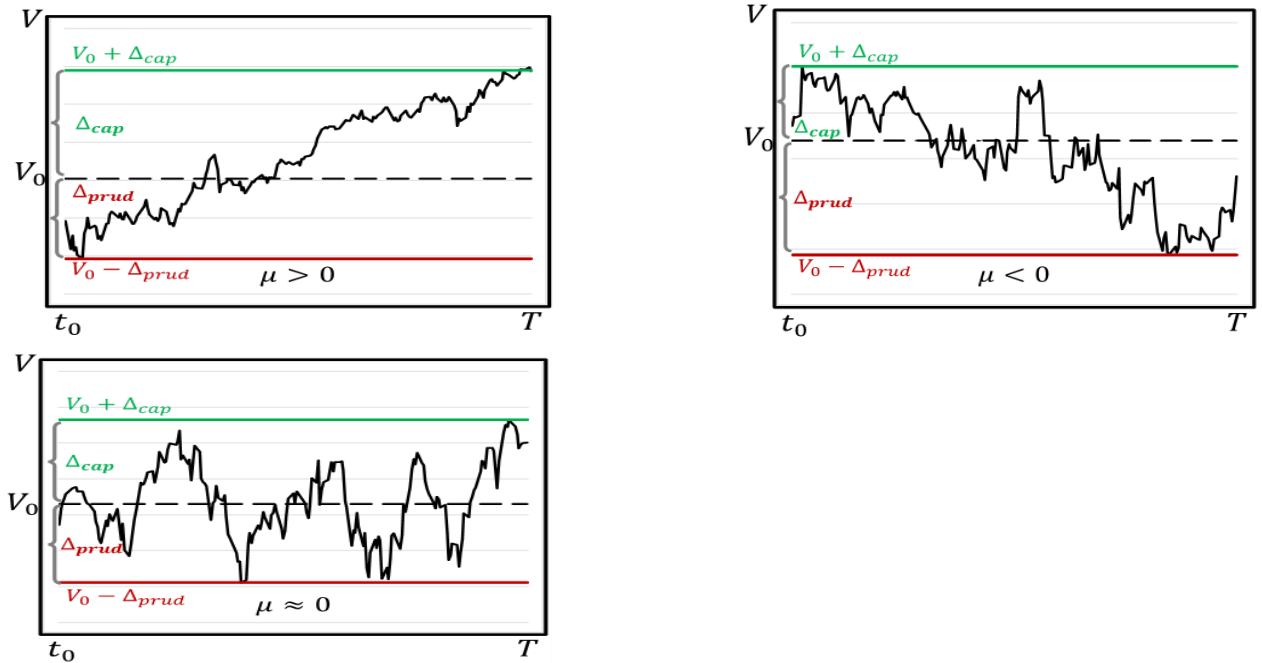


Рис.2. Схематичне представлення довгострокових "граничної" та "пруденційної" оцінки вартості для зростаючого ($\mu > 0$), стагнующого ($\mu \sim 0$) та падаючого ($\mu < 0$) ринків.

Нарешті, для стохастичного процесу еволюції вартості активу можна оцінити нижню або "пруденційну" $V_{t,p,prud}$ та верхню або "граничну" $V_{t,p,car}$ величини вартості як:

$$\begin{aligned} V_{t,p,prud} &= V_0 + \Delta_{t,p,prud} = V_0 + V_0(1 - \exp^{x_p}), \\ V_{t,p,car} &= V_0 - \Delta_{t,p,car} = V_0 - V_0(\exp^{y_p} - 1), \end{aligned} \quad (9)$$

де V_0 - вартість активу в початковій точці аналізу процесу, коли $t=0$, параметри x_p та y_p означають:

$$x_p = \ln(V_0 - \Delta_{t,p,prud}) - \ln V_0, \quad y_p = \ln(V_0 + \Delta_{t,p,cap}) - \ln V_0, \quad (10)$$

Рівняння (9) дає остаточну версію оцінки нижньої $V_{t,p,prud}$ та верхньої $V_{t,p,cap}$ меж значень активу з корегуючими параметрами $\Delta_{t,p,prud}$ та $\Delta_{t,p,cap}$ для активу з початковою ринковою вартістю V_0 , при заданому рівні ймовірності p та параметрах стохастичної еволюції ринкової вартості активу σ , μ , що описуються параметрами x_p та y_p . Детальне практичне застосування представленої теоретичної моделі наведено нижче з графічною схемою, яку продемонстровано на рис.2.

5. Тестування моделі та обговорення результатів

Для забезпечення тестування розробленої моделі та оцінки її параметрів необхідна початкова база статистичних даних про еволюцію ринку активів. Для цього використано вихідний масив даних ринку житлової нерухомості України, який відстежується та поповнюється на постійній основі під методологічним та оперативним керівництвом авторів.

Створення цієї первинної бази даних здійснюється шляхом моніторингу та накопичення інформаційних потоків з існуючого ринку нерухомості та їх подальшої поглибленої статистичної обробки. Використання сучасних методів управління базами даних (PostgreSQL), геоінформаційних систем (QGIS) та бібліотеки скриптів (Python) дозволяє найбільш ефективно організувати формування бази даних та постійне оновлення вихідного масиву даних

Для системного отримання комплексних результатів було використано відповідні автоматизовані розрахункові інструменти, а також пакети прикладних програм, що дозволило виявити сучасні тенденції ринку нерухомості та спрогнозувати пріоритетні напрямки його розвитку в майбутньому. Важливим аспектом цього аналізу є його повністю імовірнісний характер, що є необхідним для достовірної оцінки параметрів розробленої моделі. Методологічні засади та основні елементи бази даних житлової нерухомості, яка охоплює всі регіони українського ринку нерухомості, а також особливості її еволюції описані у спеціальній публікації (Якубовський *та ін.*, 2024).

Часовий діапазон, охоплений цією первинною базою даних про житлові квартири, яка використовувалася для оцінки параметрів, становив 54 місяці з липня 2019 року по грудень 2023 року. Цей період включає також два спалахи пандемії COVID-19, зафіксовані в Україні навесні 2020 року та восени 2021 року, а також триваючу війну, що розпочалася в лютому 2022 року. Загальний щомісячний обсяг ринку, доступний для України в цілому та адаптований у цій базі даних, коливався між 175 000 та 210 000 пропозиціями продажу по всій країні.

Статистичний аналіз репрезентативних вибірок ринку житлової нерухомості проводився насамперед за основним фінансовим показником - вартістю 1 кв. м загальної площі квартири. Багаторазове застосування потужного критерію статистичної згоди Пірсона як для всієї сукупності даних по країні, так і для окремих регіонів та міст всередині країни, їх кластерів, а також різних часових інтервалів наочно продемонструвало найбільшу відповідність генеральної статистичної вибірки розподілу цього основного фінансового показника логнормальному закону розподілу (рис.3). Цей важливий статистично обґрунтований висновок відповідає одному з основних припущень раціональної теорії варрантного ціноутворення Самуельсона (Samuelson, 1965). Виходячи з цього, вся

подальша обробка первинної інформаційної бази ґрунтувалася на визначенні параметрів логнормального розподілу, прийнятого в якості теоретичного закону для всієї генеральної сукупності інформаційних баз даних розподілу вартості квадратного метру площі квартир.

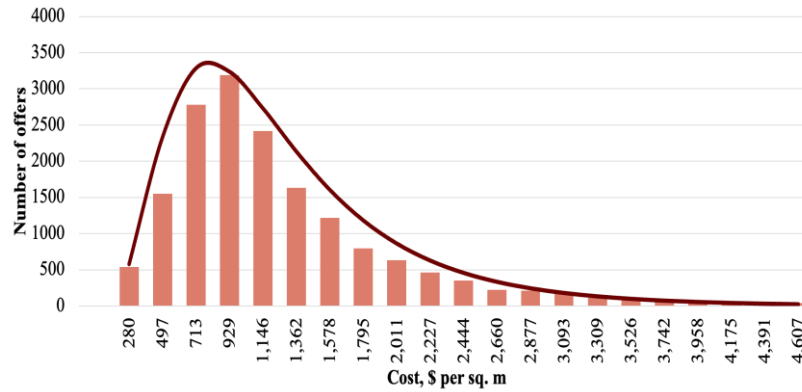


Рис. 3. Щільність розподілу вартості 1 кв. м квартир на вторинному ринку України станом на грудень 2023 року.

Динаміка медіанного значення V_{av} та коефіцієнта дисперсії σ_v площі квадратного метра квартири в цілому по ринку країни демонструє еволюцію цих параметрів у часі (рис. 4). Загальна тенденція зміни медіанного значення на зазначеному часовому проміжку є досить помітною і спрямована до зростання, тоді як волатильність цього параметру, виміряна через коефіцієнт дисперсії, є більш стабільною в часі в останні роки.

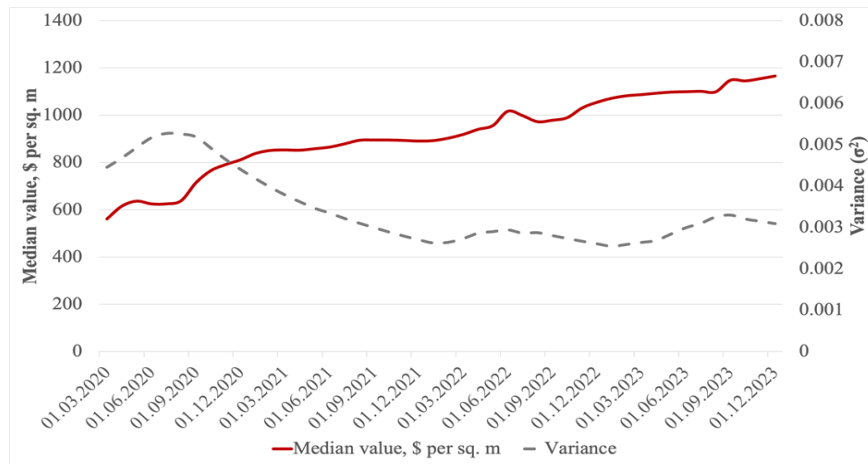


Рис. 4. Динаміка медіани та дисперсії вартості квадратного метра житла в Україні у 2020-2023 роках.

У нашому практичному випадку для розрахунків ми маємо: часовий інтервал $\tau=1$ місяць, кількість інтервалів $n=54$, а загальна тривалість $T=54$ місяці. На основі наявного набору даних ми оцінюємо параметри μ та σ за допомогою лог-повернень наступним чином.

$$q_k := \ln\left(\frac{U_{k\tau}}{U_{(k-1)\tau}}\right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Лог-повернення q_k слідує розподілу, вираженому як:

$$\frac{q_k}{\sqrt{\tau}} = a\sqrt{\tau} + \sigma\gamma_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (12)$$

де $\gamma_k = \tau^{-\frac{1}{2}}(B_{k\tau} - B_{(k-1)\tau})$, $k \geq 1$, - незалежні стандартні нормальні змінні.

Для моделі спостережень (12) оцінка максимальної правдоподібності a має вигляд

$$\hat{a} = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{n\tau} \ln\left(\frac{U_{T0}}{U_0}\right), \quad (13)$$

а незміщена оцінка σ^2 обчислюється як:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-1)\tau} \sum_{i=1}^n (q_i - \tau \hat{a})^2. \quad (14)$$

Відповідно до співвідношення (3), μ визначається як:

$$\hat{\mu} = \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}. \quad (15)$$

На наступних кроках ми підставляємо оцінки максимальної правдоподібності $\hat{a}$ та $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ в a, σ , відповідно, в наведені рівняння. Необхідно підкреслити, що методологія отримання оцінки x_p детально описана в (Yakubovsky, et al, 2022) і базується на отриманні x_p за допомогою рівняння (16), де для будь-яких $T > 0$ $a \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$ і $x_p \leq 0$

$$F(x_p; a; \sigma) := P(\min_{0 \leq t \leq T}(at + \sigma W_t) \geq x_p) = \\ - \exp\left(\frac{2ax_p}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{x_p + aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(\frac{-x_p + aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) = p \quad (16)$$

Визначивши x_p , ми можемо обчислити параметр $\Delta_{(t,p,prud)}$ як фактор часу на основі рівняння (9), де

$$\Delta_{t,p,prud} = V_0(1 - \exp^{x_p}). \quad (17)$$

Аналогічним шляхом проводиться обчислення параметру y_p за допомогою аналітичного розв'язку рівняння (7). Тут ми згодом застосуємо формулу (9) для визначення параметра $\Delta_{t,p,car}$ як:

$$\Delta_{t,p,car} = V_0(\exp^{y_p} - 1). \quad (18)$$

Цей систематизований підхід застосовуються для визначення кожного необхідного параметру. Згодом, кульмінація цієї методології стають остаточні параметри поправок як для верхньої межі ($\Delta_{t,p,car}$), так і для нижньої межі ($\Delta_{t,p,prud}$) вартості квадратного метра площі квартир.

Використовуючи статистичні розрахунки на основі доступної бази даних, при $t = 0$ станом на 1 грудня 2023 року, питома вартість V_0 була визначена на рівні 1125 доларів США за кв. м. Оцінки параметрів для параметрів μ, σ та a були проведені протягом 54-місячного періоду з липня 2019 року по грудень 2023 року з використанням формул (13-15) і дали наступні результати:

$$\hat{\mu} = 0,012808638, \hat{\sigma} = 0,055188773, \hat{a} = 0,011285738.$$

Розрахунок часових факторів $\Delta_{t,p,car}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ передбачав вибір трьох різних значень ймовірностей: $p_1 = 0.6827$, $p_2 = 0.9545$, $p_3 = 0.9973$. Ці ймовірності підпорядковуються правилу n -сигма, де для розподілу $\gamma \sim N(m, s^2)$ виконується співвідношення $P(|\gamma - m| \leq ns) = p_n$, при чому $n = 1, 2, 3$. Згодом, для кожної ймовірності p_n , значення $\Delta_{t,p,car}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ були обчислені за допомогою рівнянь (17) та (18), відповідно.

На рис. 5 наведено загальну залежність корегуючих параметрів $\Delta_{t,p,car}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ від загальної тенденції розвитку ринку μ . При однаковому рівні волатильності $\hat{\sigma}$, параметр μ змінюється в діапазоні між $(-0,010)$ та попередньо оціненим за історичним масивом даних значенням $(+0,0128)$. Тут додатні μ відповідають зростаючому ринку, $\mu = 0$ - стагнації, тоді як $\mu < 0$ - характеризує тенденцію падіння ринку.

Як і очікувалось, загальна тенденція вказує на те, що для більших значень коефіцієнта зростання μ , параметр корекції $\Delta_{t,p,car}$ є більшим, щоб відобразити вплив ролі загального тренду на додаток до рівня впливу волатильності на фіксованому проміжку часу. Для нижньої межі поправки $\Delta_{t,p,prud}$ ця тенденція протилежна, тому негативний тренд вимагає більш значної поправки на нижню межу процесу, що стохастично розвивається (рис.2).

В той же час, за більш жорстких вимог до надійності результатів, виражених рівнем ймовірності p , параметр поправки на стохастичність також демонструє відповідне зростання (рис. 5).

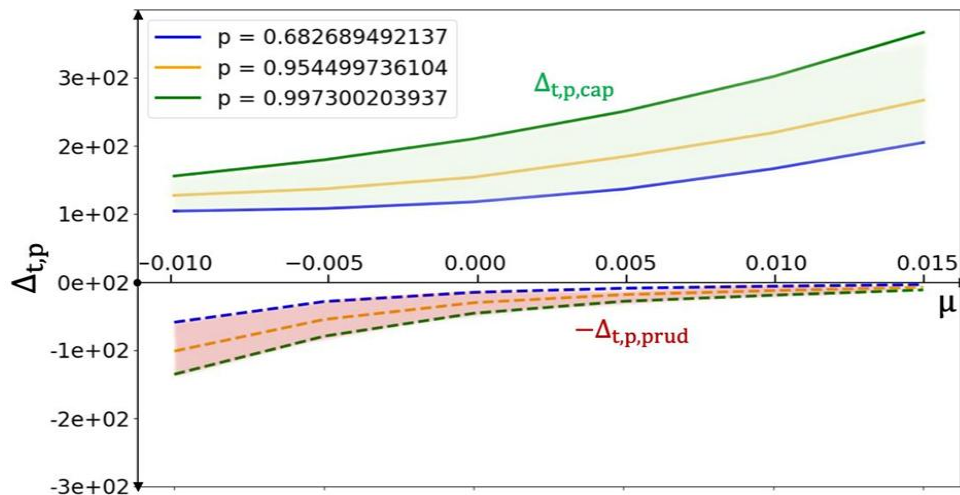


Рис. 5. Залежність часових поправочних коефіцієнтів $\Delta_{t,p,car}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ від коефіцієнта зростання μ для різних рівнів ймовірності p вартості житлової нерухомості в 1 кв. м.

Кілька чисельних результатів, отриманих для різних рівнів очікуваного коефіцієнта зростання ринку μ та прийнятого рівня ймовірності p , які підтверджують зазначені вище загальні тенденції наведені в таблиці нижче. Як видно з наведених результатів, величина параметра поправки на стохастичність для верхньої межі є помітно вищою порівняно з його рівнем для нижньої межі за інших рівних умов. Найбільш очевидно це проявляється для стагнуючих ринків, коли тренд зростання μ близький до нуля. Це відповідає дійсності, оскільки відповідає характеру функції розподілу загальної ймовірності житла, продемонстрованому на рис.3, коли верхній "хвіст" розподілу є більш вираженим

Сильна залежність параметра поправки Δ від очікуваного темпу зростання μ також чітко простежується з протилежними тенденціями для верхньої та нижньої межі. Для зростаючих ринків довгострокова нижня межа параметру корекції ринкової вартості не є вражаючою, в той час як для країн з падаючою економікою ця корекція повинна бути достатньо високою, щоб покрити загальну тенденцію до "падіння" їх економік. І навпаки, параметр корекції верхньої межі є набагато більш значущим для зростаючих ринків, будучи менш вражаючим у випадку ринків, що сильно страждають

Враховуючи протилежну тенденцію, належне порівняння необхідної поправки на часовий ефект можна зробити, порівнюючи результати для стагнуючих ринків з темпами зростання, близькими до $\mu = 0$. У такому випадку довгострокова поправка для отримання пруденційної вартості активу $\Delta_{t,p,prud}$ коливається в діапазоні від 14,99 USD/кв.м. до 45,70 USD/кв.м. залежно від необхідного рівня надійності. Для тих же рівнів надійності верхня межа поправки параметру $\Delta_{t,p,car}$ коливається в межах від 117,87 у.о./кв.м до 210,87 у.о./кв.м (таблиця). Для порівняння з середньою ринковою вартістю житлових квартир в Україні,

наведеною на Рис.3, цей діапазон у відсотках для коефіцієнта поправки на пруденційну вартість становить від 1,4 % до 4,2 %, а для параметра поправки на граничну вартість - від 11,1 % до 19,8 % відповідно для різних рівнів надійності, виходячи з результатів, які відповідають кінцю грудня 2023 року.

Таблиця

Поправочні коефіцієнти $\Delta_{t,p,car}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ * рівень в USD/кв. м для житлових квартир для очікуваного рівня зростання ринку μ та заданого рівня надійності p

Reliability level, $p, \%$	Growth factor, μ					
	(-0.010)	(-0.005)	0	(+0.005)	(+0.010)	(+0.015)
$p=68.27=1\sigma$	$\frac{104.36}{58.89}$	$\frac{108.08}{28.60}$	$\frac{117.87}{14.99}$	$\frac{136.56}{8.94}$	$\frac{166.63}{5.97}$	$\frac{205.00}{3.58}$
$p=95.45=2\sigma$	$\frac{127.32}{101.29}$	$\frac{136.88}{54.85}$	$\frac{153.97}{30.22}$	$\frac{184.11}{18.31}$	$\frac{219.32}{12.35}$	$\frac{267.03}{7.41}$
$p=99.73=3\sigma$	$\frac{155.67}{135.33}$	$\frac{179.33}{79.41}$	$\frac{210.25}{45.7}$	$\frac{250.49}{28.15}$	$\frac{301.62}{19.11}$	$\frac{366.57}{11.47}$

*У таблиці в чисельнику наведено вартість $\Delta_{t,p,car}$, а в знаменнику - вартість $\Delta_{t,p,prud}$

Тривимірне представлення залежності параметрів корекції $\Delta_{t,p,car}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ від швидкості зростання тренду μ та рівня волатильності σ для фіксованого рівня надійності $p=95.45=2\sigma$ наведено на рис.6, де наочно простежуються загальні тенденції зміни їх величин, описані вище.

Найбільш адекватне порівняння результатів розробленого аналітичного підходу з існуючими рекомендаціями може бути здійснене стосовно регуляторних вимог, встановлених вищезгаданою моделлю CRR/EBA. Згідно з вимогами цієї моделі, у випадку спрощеного шляху пруденційне значення або нижня межа коригування має бути прийнята на рівні 0,1% від загального рівня базового значення рівня вартості.

Належне порівняння з результатами, які дає розроблений підхід, повинно проводитись для адекватних умов, включаючи рівень визначеності, який також зафіксований в нормативних документах CRR/EBA на рівні 90%. Тенденція до зростання не враховується у згаданих нормативних документах, тому для коректного порівняння слід припустити стагнацію ринку, де коефіцієнт зростання $\mu = 0$. На основі цих початкових припущень розроблена аналітична модель дає корегуючий параметр $\Delta_{t,p,prud} = 26,20$ \$/кв. м. або 2,4% від базової ринкової вартості. Як бачимо, результати отримані за допомогою розробленої моделі, значно перевищують ті, що передбачені європейськими нормами для таких випадків.

Однією з можливих причин такої різниці є значно вищий рівень волатильності, притаманний українському ринку житлової нерухомості, який щонайменше у 2,5 рази вищий порівняно з розвинутими країнами (Якубовський та Бичков, 2018). Така різниця в стохастичності еволюції вартості може мати прямий вплив на рівень нижньої межі еволюції процесу через параметр σ , який відображає цей фактор у розробленій моделі. Для зростаючих ринків з коефіцієнтом зростання $\mu > 0$ поправочний параметр $\Delta_{t,p,prud}$ зменшується, але все ще залишається вищим за встановлений Регламентом CRR/ЄБА для рівня пруденційного коригування вартості (таблиця).

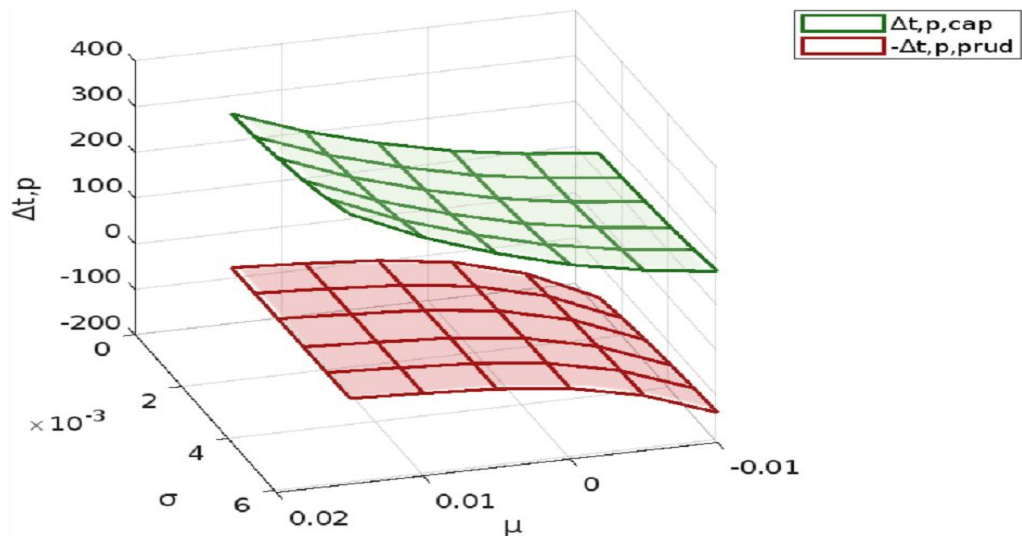


Рис. 6. Тривимірна залежність параметрів $\Delta_{t,p,cap}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ від дисперсії σ та коефіцієнта зростання μ для верхньої та нижньої меж.

Підсумовуючи вищевикладене, загальну модель стохастичного аналітичного підходу, розробленого для врахування часового ефекту в процесах оцінки активів для визначення як верхньої або "граничної" так і нижньої або "пруденційної" межі вартості, можна продемонструвати на рисунку 2. Основне завдання полягає в тому, щоб на основі розробленої методики оцінити рівень коригувальних параметрів $\Delta_{t,p,cap}$ та $\Delta_{t,p,prud}$ для окремого об'єкта аналізу, використовуючи рівень волатильності σ з зареєстрованих історичних ринкових даних, з урахуванням очікуваного зростання ринку μ та необхідного рівня надійності p .

Відповідно до простих рівнянь (9) для оцінки довгострокової «граничної» та «пруденційної» вартості, ці коригувальні параметри слід додавати для верхньої межі та віднімати для нижньої межі від ринкової вартості активів, оціненої традиційними методами оцінки, щоб задовольнити, зокрема, заяву спільної дослідницької групи IVSC/TEGoVA/RICS, яка підкреслила, що "будь-яка оцінка пруденційної вартості повинна супроводжуватися ринковою вартістю, коли це можливо, оскільки це є необхідною вимогою, щоб відповідати визначенню Базеля III" (Crosby and Hordijk, 2021).

Загальну методологію оцінки верхньої або "граничної" та нижньої або "обачної" вартості в рамках розробленого підходу можна розділити на наступні послідовні кроки:

- оцінити будь-яким відповідним традиційним методом ринкову вартість активу V_0 в момент часу $t=0$;
- на основі історичних даних оцінити рівень волатильності σ ринкової вартості активу $V_{(t)}$;
- на основі історичних даних та прогнозу оцінити очікуваний коефіцієнт зростання μ ;
- прийняти необхідний рівень визначеності/надійності p ;
- розрахувати параметри корекції $\Delta_{p,t,cap}$, $\Delta_{p,t,prud}$ в залежності від того, які потрібні;
- додати поправочний параметр $\Delta_{p,t,cap}$ до ринкової вартості V_0 , щоб отримати довгострокову "граничну" вартість, або відняти поправочний параметр $\Delta_{p,t,prud}$ від ринкової вартості V_0 , щоб прийти до "пруденційної" оцінки вартості активу.

В результаті, базуючись на теоретичному розгляді волатильності окремих активів, що походить з раціональної теорії варрантного ціноутворення П. Самуельсона, розроблений підхід із припущеннями та обмеженнями, зазначеними вище, та використанням таких

ключових параметрів як прийнятий рівень визначеності, вираженого ймовірністю p , волатильність еволюції процесу σ та загальної тенденції μ , може бути використаний для оцінки як верхньої, або "граничної", так і нижньої, або "пруденційної" вартості активу в будь-який момент часового горизонту при заданому рівні його ринкової вартості (Рис.2). На відміну від існуючих підходів "наскрізь циклу" та "під циклом", запропонована методологія може бути віднесена до моделі "слідування за циклом", яка дозволяє оцінити довгострокові екстремальні значення вартості активу.

6. Заключні положення

Підсумовуючи викладене, можна констатувати, що проблема надійних та достовірних методів оцінки повинна враховувати стохастичність вартості активів, яка змінюється в часі під впливом різноманітного спектру факторів. Ця проблема безпосередньо пов'язана зі стабільністю та прозорістю фінансової системи, що підкреслюється, зокрема, в Угоді Базель III та рекомендаціях Європейської Банківської Адміністрації, які визначили необхідність виключення в оціночній практиці застосування тільки концепції ринкової або справедливої вартості. Така теза була рішуче підтримана в нещодавньому узагальнюючому дослідницькому звіті, профінансованому спільно Форумом інвестиційної нерухомості та Трастовим фондом досліджень нерухомості (Crosby and Hordijk, 2023). Більше того, необхідність "...методології оцінки для забезпечення пруденційної вартості в контексті нерухомості" була підкреслена в спеціальному листі IVSC, присвяченому цьому питанню (IVSC, 2023/2)

З метою намагання компенсації цієї прогалини розроблено новий стохастичний підхід до врахування волатильності в процесі оцінки активів, який базується на раціональній теорії варрантного ціноутворення Самуельсона. Отримано аналітичні рішення для оцінки запропонованих поправочних коефіцієнтів для верхньої або "граничної" та нижньої або "пруденційної" межі вартості активів з урахуванням очікуваного зростання ринку та необхідної надійності. На основі цього запропоновано загальну структуровану методологію оцінки верхніх і нижніх екстремальних значень вартості активу протягом еволюції ринкового часового горизонту.

Основні переваги розробленої моделі випливають з її особливостей, а саме:

- тверде аналітичне підґрунтя, засноване на добре відпрацьованій і доведеній ефективності раціональної теорії вартісного ціноутворення Самуельсона, що дозволяє уникнути схематичного представлення еволюції вартості нерухомості в часі, яке використовується в існуючих найпоширеніших підходах;
- на відміну від існуючих підходів, схематизованих за змістом, модель представляє загальну методологію для оцінки як верхнього, так і нижнього, або "пруденційного" рівня вартості майна, яка стохастично змінюється з часом;
- модель включає обмежену кількість основних параметрів, які відображають стохастичну поведінку еволюції власності в часі, а саме тренд еволюції через параметр μ , рівень волатильності через коефіцієнт дисперсії σ та рівень ймовірності p ;
- оцінка параметрів корекції $\Delta_{t,p, cap}, \Delta_{t,p, prud}$ для верхнього або "граничного" та нижнього або "пруденційного" рівнів базується на прямому аналізі тренду стохастичності вартості та рівня волатильності через коефіцієнти μ та σ , відповідно;
- за відсутності вихідної бази ринкових даних для розрахунку цих 2 основних параметрів моделі вони можуть бути прийняті на основі історичних даних щодо еволюції вартості нерухомості з відповідним прогнозом, тоді як третій параметр

моделі, яким є рівнем ймовірності p , повинен бути прийнятий виходячи з необхідної надійності результатів.

- основна концепція моделі орієнтована на оцінку параметрів коригування для визначення верхньої або "граничної" межі вартості та нижньої або "пруденційної" межі вартості з метою коригування ринкової вартості нерухомості V_0 та визначення її екстремальних значень для даного періоду часу. Це забезпечує використання в моделі базового поняття ринкової вартості, додаючи аналітично обґрунтований підхід до оцінки її верхньої та нижньої меж на основі фактичних даних аналізу стохастичності зміни вартості.

Реалізація розробленого підходу була успішно перевірена з використанням наявного набору даних українського ринку житлової нерухомості. Порівняння з результатами, які можуть бути отримані за правилами CRR/ЕБА, продемонструвало достатню адекватність розробленої моделі, яка має бути додатково протестована для різних ринків та фінансово-економічних секторів.

Список використаних джерел.

Aquinas Thomas (1273). Summa Theologica, available at: <https://www.newadvent.org/summa/> (accessed on 30.08.2023);

Babcock H.A. (1968). Appraisal Principles and Procedures. Homewood, IL: Richard D. Irwin, Inc. 417 p.

Bachelier, Luis (1900). Théorie de la spéculation. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. Serie 3, 17: 21–89. doi:10.24033/asens.476. hdl:2027/coo.31924001082803

Basel III. (2017). Basel Committee on Banking Supervision, Finalizing post-crisis reforms, available at: <https://www.bis.org/bcbs/publ/d424.pdf> (accessed on 12 April 2024).

Bensoussan A. (1984) On the theory of option pricing. — Acta Applicandae Mathematicae, 1984, v. 2, p. 139-158.

Black F., Scholes M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. — Journal of Political Economy, 1973, May/June, p. 637-657.

Brennan Michael and Xiab Yihong (2008). Stock Price Volatility and the Equity Premium. Dep. of Finance, the Anderson School of Management, UCLA. Archived from the original on 2008-12-28.

Burston B. and Burrell A. (2015), What is Fair Value? IPF Short Paper 24. Investment Property Forum: London, available at: <https://www.ipf.org.uk/resourceLibrary/what-is-fair-value--april-2015--short-paper.html> (accessed on 12 April 2024).

Calvet Laurent E. and Fisher Adlai J. (2001). Forecasting Multifractal Volatility. Journal of Econometrics. 105 (1): 27–58. doi:10.1016/S0304-4076(01)00069-0. S2CID 119394176.

Calvet Laurent and Fisher Adlai (2004). How to Forecast long-run volatility: regime-switching and the estimation of multifractal processes. Journal of Financial Econometrics. 2: 49–83. CiteSeerX 10.1.1.536.8334. doi:10.1093/jjinec/nbh003. S2CID 6020401.

Cardozo C., Clarke R., Crosby N. and McTigue J. (2017), Prudent Value Methodologies and Real Estate Lending. Report for the Property Industry Alliance. London: Investment Property Forum / Commercial Real Estate Finance Council Europe, available at: <http://www.ipf.org.uk/asset/D05FA2C5-487D-4C76-997B57F3A3D72BAD>, (accessed on 28.November 2023).

Crosby N. and Hughes C. (2011), The basis of valuations for secured commercial property lending in the UK. Journal of European Real Estate Research. Vol 4 Issue 3: pp. 225 – 242.

Crosby N. and Hordijk A. (2021), Approaches for Prudent Property Valuation across Europe. IVSC, TEGoVA, RICS, Independent Research Steered by Coalition of the Leading Global and European Professional Valuer's Associations and Valuation Standards Setters.- 90 p.

Crosby N. and Hordijk A. (2023). The Implementation of Long-Term Prudent Valuation Models Across the UK and Mainland Europe for Financial Regulation Purposes. A Research Report funded jointly by the Investment Property Forum Research Programme and the Property Research Trust. – 59 p., available at: [file:///C:/Users/user/Downloads/The-implementation-of-long-term-prudent-valuation-models-across-the-UK-and-Mainland-Europe-for-financial-regulation-purposes-March-2023-Report%20\(3\).pdf](file:///C:/Users/user/Downloads/The-implementation-of-long-term-prudent-valuation-models-across-the-UK-and-Mainland-Europe-for-financial-regulation-purposes-March-2023-Report%20(3).pdf) (accessed on 14.04.2024)

Debicki K. and M. Mandjes M. (2015). Queues and Lévy fluctuation theory, Springer. – 255 p. doi.org/10.1007/978-3-319-20693-6;

Doob Joseph L. (1990). Stochastic Processes. Wiley. 654 p.

EBA (2019). European Banking Authority. Policy Advice on the Basel III Reforms: Credit Risk Standardized Approach and IRB Approach, 02 August 2019. available at: <https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/documents/10180/2886865/d383ee58-8665-4f8b-99d3-058984c2711e/Policy%20Advice%20on%20Basel%20III%20reforms%20-%20Credit%20Risk.pdf?retry=1> (accessed on 12 April 2024).

EBA/RTS/2020/04(2020). EBA Final draft Regulatory Technical Standards on prudent valuation under Article 105(14) of Regulation (EU) No 575/2013. available at: https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_library/Publications/Draft%20Technical%20Standards/2020/RTS/882753/EBA-RTS-2020-04%20Amending%20RTS%20on%20Prudent%20Valuation.pdf (accessed on 12 April 2024)

EUR (2013). Regulation (EU) No 575/2013 of the European Parliament and of the Council of 26 June 2013 on prudential requirements for credit institutions and investment firms and amending Regulation (EU) No 648/2012. Text with EEA relevance, available at: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=celex%3A32013R0575> (accessed on 12 April 2024).

Fama, E (1965). The behavior of stock market prices. Journal of Business. 38.

Graaskamp J.E. (1977). The Appraisal of 25 N. Pinckney. Landmark Publishers, Madison, WI.

Grimman W. (2017), Mortgage Lending Value. VerbandDeutcherPfandbriefbanken, e.v., Band 49.- 296 p.

Hamilton, James (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. Econometrica. 57 (2): 357–84. CiteSeerX 10.1.1.397.3582. doi:10.2307/1912559. JSTOR 1912559.

IVS, International Valuation Standards (2022), International Valuation Standards Council. - p. 22;

IVSC, International Valuation Standards Council (2023/1). “Why is valuation important?”, available at <https://www.ivsc.org/about/> (accesses on 07 April 2024).

IVSC, International Valuation Standards Council (2023/2). Prudential Property Value: Our Efforts to Ensure Transparency and Consistency 31 July 2023, available at: <https://www.ivsc.org/prudential-property-value-our-efforts-to-ensure-transparency-and-consistency/> (accessed on 14.04.2024).

Karatzas I., Shreve S. E. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, - 470 p.

Kinnard W.N. (1966). New Thinking in Appraisal Theory. The Real Estate Appraiser, August 1966, p. 8.

Kohlscheen, E. and Takáts. E. (2020). What can commercial property performance reveal about bank valuations? BIS Working Papers No 900, Bank of International Settlements. Available at: <https://www.bis.org/publ/work900.pdf> (accesses on 14.04.2024)

Kummerov Max (2002). A Statistical Definition of Value. The Appraisal Journal. October 2002, pp.407-416.

Medici Giuseppe (1953). Principles of Appraisal. The Iowa State College Press, - 254 p., available at: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2307/1233028> (accessed on 09.01.2024);

Merton R. (1973). Theory of rational option pricing. — Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (Spring), p. 141-183.

Nordlund B. (2008), Valuation Performance Reporting in Property Companies According to IFRS. Doctoral thesis in Building and Real Estate Economics, Royal Institute of Technology, Stockholm, - 136 p.

PIA/CREFC Europe/IPF (2017) Long-term Value Methodologies and Real Estate Lending. London: Property industry Alliance/ Investment Property Forum / Commercial Real Estate Finance Council Europe. <http://www.ipf.org.uk/asset/D05FA2C5-487D-4C76-997B57F3A3D72BAD>

References.

Pooley G.L. (2015). Adding Value to Valuation with Confidence. The Appraisal Journal, Summer 2015, pp.218-225.

Ratcliff R.U. (1964). A restatement of Appraisal Theory. The Appraisal Journal, Vol. 32. No.1, pp.50-67

RICS Guidance Note (2018). Bank Lending Valuations and Mortgage Lending Value. Available at: [https:// www.rics.org/guidance](https://www.rics.org/guidance), (accessed on 12 April 2024).

Samuelson P. A. (1965) Rational theory of warrant pricing. Industrial Management Review, 6:2, p. 13- 39.

Shiryaev A. N., et al (1995). Towards the theory of pricing of options of both European and American types. II. Continuous time. Theory of Probability and its Applications, 39:1, 61–102.

Sveshnikov A.A.(2007). Applied Methods of Markov Processes Theory. St. Petersburg, “Lanj” Publ. – 192 p.

Tikhonov V.I. and Mironov M.A. (1977). Markov Processes. Moscow. “Soviet Radio” Publ. in Russian) – 482 p.

Yakubovsky V.V., Bychkov O.S.(2018). Comparative Statistical Analysis of the Main Approaches to Property Valuation. Journal of Advanced Research in Law and Economics. Vol. IX, issue 8(38), winter 2018, ASERS Publishing, pp. 2892-2902

Yakubovsky V.V., Kukush A. G., Yakovlev Mykyta S. (2022). Stochastic Analytical Approach to the Time Factor Consideration in Assets Valuation. Kyiv.: Actual Problems of International Relations, v.150, KNU named after Taras Shchenchenko, pp. 47-56.

Yakubovsky V.V., Bychkov O. S., Zhuk K. O. (2024). Deterministic and Probabilistic Analysis of Ukrainian Residential Property Market Evolution in Turbulent 2019-2022 Years. International Journal of Housing Market and Analysis, , 10 Jan 2024, Vol. 17, Issue 1, pages 218 – 241. available at: <https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/IJHMA-02-2023-0032/full/html>. (accessed on 12.04.2024).