МАТЕМАТИЧНА ТА ЕКОНОМІЧНА СУТНІСТЬ МОДЕЛІ ГОРДОНА

При визначенні вартості корпоративних прав та бізнесу часто використовують Модель постійної зміни величини дивідендів, як правило зростання дивідендів, але може бути і як їх незмінність так і їх спадання в кожному наступному періоді відносно попереднього. Така модель хоч і отримала назву Dividend Discount Model (DDM), але більш відома в літературі як модель Гордона (Gordon Growth Model). Модель названа по імені М.Дж.Гордона (M.J.Gordon), який опублікував її з Елі Шапіро (Eli Shapiro) в спільній публікації: під назвою Capital Equipment Analysis: The Required Rate Profit опублікованій в журналі Management Science, 3 (1) в жовтні 1956 року. В цій статті автори посилались на теоретичні та математичні ідеї Д.В.Вільямса, які він виклав в монографії «The Theory of Investment Value» Williams J.B., N.Y., ще в 1938 році, звідки і з'явились витоки моделі Гордона.

В 1959 році вийшла стаття Гордона про дивіденди і ціни акцій: Gordon M.J. Dividends, Earnings and Stock Prices Review of Economics and Statistics. 1959, Vol.41, ics 2. p. 99-405. Після цього модель зростання дивідендів з однаковим темпом в кожному періоді і отримала назву як модель Гордона. В той же час, в західній літературі цю модель також називають і як модель Вільямса-Гордона-Шапіро.

М.Дж.Гордон для спрощення розрахунків зробив просте допущення, що дивіденди змінюються від періоду до періоду з постійним темпом *g*, тобто дивіденд *k+1-го* періоду визначається через дивіденд *k-го* періоду наступним чином:

$$D_{k+1} = D_k(1+g) \quad (1)$$

Це означає, що всі наступні дивіденди, визначаються через дивіденди першого періоду, а саме, для будь якого періоду *N*

$$D_N = D_1(1+g)^{N-1}, \quad \text{N= 1,2,…} \qquad (2)$$

Оскільки теоретично строк дії акції не обмежений, то загальна формула дисконтування дивідендів при визначенні вартості акції набуває вигляду:

$$C = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_1(1+g)}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{D_1(1+g)^{N-1}}{(1+i)^N} \qquad (3)$$

Формула спрощується, оскільки у випадку, коли *0<1+ g <1+i*, де *i* – ставка дисконту, вона є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії, де перший член *D,/(1+i)*, а знаменник *(1+ g)/(1+i).* Сума такої геометричної прогресії рівна

$$C = \frac{D_1}{1+i} \text{x} \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+i}} = \frac{D_1}{1-g} \quad (4)$$

Незважаючи на той факт, що М. Дж.Гордон допустив, що дивіденди зростають з темпом *0≤ g <i*, загальна формула (3) є також нескінченно спадною геометричною прогресією і у випадку коли -*1< g <0*, тобто і у випадку, коли дивіденди поступово однаково зменшуються.

Отже, модель Гордона має місце і коли дивіденди від періоду не тільки зростають *(0< g <i)*, але й коли спадають -*1< g <0,* а якщо ж *g=0,* то дивіденди в кожному періоді однакові.

М.Дж.Гордон отримав останню формулу, допустивши, що дивіденди зростають і виплачуються постійно, протягом нескінченного довгого часу. В цьому випадку, формула Гордона є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії.

Покажемо, що формула (4), яка відома як формула Гордона, має місце і коли дивіденди виплачуються впродовж скінченного числа періодів з постійним темпом *g*, де *-1< g <i.* Дійсно, це буде завжди, коли ціна акції в кінці останнього прогнозного *N-го* періоду буде рівною $(1+g)^N C$, де *C* – поточна (обчислювана на певну дату) вартість акції. За таких допущень, коли реверсія (термінальна вартість акції) рівна $(1+g)^N C$, то:

$$C = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_1(1+g)}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{D_1(1+g)^{N-1}}{(1+i)^N} + \frac{D_1(1+g)^{N-1}C}{(1+i)^N} \qquad (5)$$

де D_1 – дивіденд, який буде сплачено в першому прогнозному році (періоді). Поклавши *(1+ g)/(1+i)=R,* отримуємо

$$C = \frac{D_1}{1-i}\frac{(1+k+\cdots+k^{(N-1)})}{1-k^N} = \frac{D}{1+i}\frac{1+k+\cdots+k^{N-1}}{(1-k)(1+k+\cdots+k^{(N-1)})} = \frac{D}{1+i}\frac{1}{1-k} = \frac{D}{1-g} \qquad (6)$$

Отже, для будь-якого скінченного числа періодів *N* впродовж яких будуть виплачуватись дивіденди, має місце формула Гордона, у випадку, коли ціна акції в кінці останнього *N-го* періоду в $(1+g)^N$ раз більша при *(0< g <i)*, або ж менша при *-1< g <0,* від ціни акції на дату її визначення.

Таким чином, якщо впродовж *N* періодів, дивіденди змінюються з темпом *1+ g*, де *-1<g<i,* а ціна акції в кінці останнього *N-го* періоду рівна $(1+g)^N C$, де *C* поточна (шукана) ціна акції на дату оцінки, то вартість акції визначається за формулою Гордона:

$$C = \frac{D_1}{i-g}$$

Отже, формула Гордона для обрахунку вартості акції через отримувані дивіденди має місце, якщо величина дивідендів змінюється з постійним темпом *1+ g, -1< g <i,* тобто, коли:

$$D_{k+1} = D_k(1+g), \qquad k=1,2\ldots,N,$$

і, якщо в кінці будь-якого періоду *N* термінальна вартість акції рівна $(1+g)^N C$.

Формулу Гордона часто застосовують для визначення вартості реверсії (термінальної вартості). При цьому всі допускають, що на нескінченній кількості періодів після останнього *N –го* періоду всі доходи (чисті грошові потоки на власний капітал чи інвестований капітал при оцінці бізнесу або ж чисті операційні доходи при оцінці нерухомості), починаючи з *N+1-го* періоду, змінюються з постійним темпом *1+ g,* тобто що $D_{k+1} = D_k(1+g)$, для будь-якого $k \geq N+1$, починаючи з D_{N+1}, доходів в *N+1* періоді.

В цьому випадку, реверсія:

$$Rev_N = \frac{D_{N+1}}{i-g}, \qquad -1 < g < i \ (7)$$

Однак, допущення щодо нескінченної кількості періодів впродовж яких будуть генеруватись доходи, означає, що оцінюваний актив є невичерпним. В дійсності рано чи пізно актив не в змозі буде генерувати доходи і в якомусь періоді його доходом буде його вартість ліквідації.

Враховуючи цей факт краще і доцільніше визначати реверсію наступним чином:

$$Rev_N = K_N C \qquad (8)$$

де, C – шукана (поточна на дату оцінки) вартість.

K_N – деякий коефіцієнт, який показує, як зміниться термінальна вартість, відносно поточної на дату оцінки, після того, якщо актив пропрацює N років.

В цьому випадку, шукана вартість в загальному випадку, визначається за формулою:

$$C = \frac{\frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2(1+g)}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{D_N}{(1+i)^N}}{(1 - \frac{K_N}{(1+i)^N})} \qquad (9)$$

Остання формула спрощується, якщо є певна закономірність зміни доходів D_k і при певних K_N.

Наприклад:

1. Якщо $D_{k+1} = D_k(1+g)$, $k=1, 2\ldots, N-1$, $-1 < g < i$, а $K_N = (1+g)^N$, то формула для визначення вартості набуває вигляду:

$$C = \frac{D_1}{i-g} \qquad (10)$$

2. Якщо всі D_k рівні між собою для всіх $k=1, 2\ldots, N$, а $K_N=0$, то формула набуває вигляду:

$$C = \frac{D_1}{i+H} \qquad (11)$$

де $$H = ФФВ(i) = \frac{i}{(k+i)^N - 1}$$

є фактором фонду відшкодування з загальною ставкою дисконту. Остання формула є формулою прямої капіталізації, де ставка капіталізації визначається по Інвуду, тобто, коли норма повернення капіталу визначається як фактор фонду відшкодування за ставкою дисконтування i.

Можна стверджувати, що відомі формули прямої капіталізації, де ставка капіталізації визначається по Рінгу або ж по Хоскольду є частинними випадками формули (9), коли всі D_k є рівними між собою ($D_1 = D_2 = \text{---} = D_N$), а коефіцієнт K_N відповідно рівний:

а) у випадку формули прямої капіталізації по Рінгу, коли норма повернення капіталу рівна $1/N$, де N – кількість періодів, впродовж яких передбачається повернути початково інвестований капітал,

$$K_N = 1 - \frac{\frac{1}{N}}{\text{ФФВ(i)}}$$

б) у випадку формули прямої капіталізації по Хоскольду, коли норма повернення капіталу впродовж N – періодів рівна фактору фонду відшкодування за безризиковою ставкою дисконту:

$$K_N = 1 - \frac{\text{ФФВ(іб)}}{\text{ФФВ(i)}}$$